# ~~54~~ 有理型函数ノ除外値ニ就テ

角谷静夫（阪大）

H. Cartan ハ C.R.t.190 (1930) デ次ノ定理ヲ証明シタ。

$y=f(x)$ ヲ全有限平面デノ有理型函数（有理函数ヲ除ク），$x=g(y)$ ヲソノ逆函数トシ Riemann 面 $F_y$ ノ上デ定義サレテヰルトスル。$a$ ヲ任意ノ複素数トシ $|y-a|=k$ ナル円デ $F_y$ ヲセカツタトシ、スベテ単葉ナ円 $|y-a|<k$ ガ切リ取ラレルナラバ（即チ $g(y)$，ソノ branch ヲトツテモ $|y-a|<k$ ニ singular point ガナケレバ）

$$(1) \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r,f)-N(r,a)}{\log T(r,f)} \leqq 1$$

ガ成立スル。但、$f$ ガ無限次ノ時ハ $\log r$ ノ total variation ガ無限ナ intervals $I(r)$ ヲ除クモノトスル。

コレヨリ

$$(2) \qquad \delta(a) = 1 - \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r,a)}{T(r,f)} = 0$$

ヲ得ル。即チ $a$ ハ R. Nevanlinna ノ意味ノ除外値デハナイ。

H. Cartan ノ証明ハ不完全ニ思ハレルノデ、次ニ、同ジ仮定 (1) ニ (2) ガ成立スルコトヲ示サウ。

適當ナ一次変換ヲ施シタト考ヘレバ，$a=0$ ノトキニ定理ヲ証明スレバ十分デアル。

$|y| \leqq 2\rho$ ニ $g(y)$ ノドノ branch ヲトツテモ singular pt. ガナイトスレバ

$$n(r,\rho e^{i\theta}) - n(r,0) \leqq \frac{L(r)}{2\rho} = \frac{1}{2\rho}\int_0^{2\pi} \frac{|f'|}{1+|f|^2} r\,d\theta, \quad x=re^{i\theta}$$

ルコトガ容易ニワカル。但 $L(r)$ ハ $|x|=r$ ノ $y(x)$ ニヨル写像ヲ更ニ
ニ0 ニテ $y$-平面ニ切スル半径 $\frac{1}{2}$ ノ Riemann 球面ノ上ニ射影
タモノ$(L_r)$ノ長サデアリ, $\ell$ ハ $|y|=2\rho$, $|y|=\rho$ ヲ夫々球面上ニ射影
テ得ラレル二ツノ円ノ間ノ球面上ノ最短距離デアル。

$\log r$ ニツイテ 1 カラ $r$ マデ積分スレバ

$$N(r,\rho e^{i\varphi})-N(r,0)\leqq N(1,\rho e^{i\varphi})-N(1,0)+\frac{1}{2\ell}\int_1^r\int_0^{2\pi}\frac{|f'|}{1+|f|^2}\,d\theta\,dr$$

$$\leqq N(1,\rho e^{i\varphi})-N(1,0)+\frac{1}{2\ell}\sqrt{\int_1^r\int_0^{2\pi}\frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\,r\,d\theta\,dr}\sqrt{\int_1^r\int_0^{2\pi}\frac{d\theta\,dr}{r}}$$

$$\leqq N(1,\rho e^{i\varphi})-N(1,0)+O\left(\sqrt{A(r,f)}\sqrt{\log r}\right)$$

$$=\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\rho e^{i\varphi})\,d\varphi = T\left(r,\frac{f}{\rho}\right)-\overset{+}{\log}\frac{|f(0)|}{\rho}$$

両辺ニ用ヒルト

$$T(r,f)-N(r,0)\leqq K(f,\rho)+O\left(\sqrt{A(r,f)}\sqrt{\log r}\right)$$

= $K(f,\rho)$ ハ $f,\rho$ ノミニ depend スル常数デアル。

ガ finite order ナルトキハコレヨリ ~~定理~~ (2) ガ成立スルコトハ明カデアル。

ガ infinite order ナルトキハ $\varepsilon>0$ ニ対シ

$$A(r,f)<T(r,f)^{1+\varepsilon}$$

$I(r)$ ヲ除イテ成立スルカラ, $\varepsilon<1$ ナルヨウニトツテオケバ ~~定理~~ (2) ガ
立スルコトガワカル。(証明終)

コノ証明ヲ見レバワカル如ク, 上ノ定理ハ $|y-a|=k$ デ $F_y$
切ツタトキ, 切リ取ラレタ円板 $|y-a|<k$ ガ必ズシモ単葉デ
テモ, 高々有限枚シカツナガラズ且, ソノ枚数ニ上界ガアレバ成立スル。
上界ガナクテモ $L_r$ ニヨツテ切ラレル円板 $|y-a|<k$ ノ最大連結枚数ヲ $p(r)$ トスル

$\int^r\frac{(p(t))^2}{t}dt=O(A(r)^{1-\delta})$, $\delta>0$ デアレバ定理ハ成立スル。